ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación Integradora — Primer cuatrimestre – 2020
Duración: 90 minutos. — 9/IX/20 – 13:00 hs.

Apellido y Nombres:

Padrón:

---

1. En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = y^T \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x.$$

Hallar la matriz con respecto a la base canónica de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el menor subespacio que contiene a los subespacios

$$\mathbb{S}_1 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\} \text{ y } \mathbb{S}_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 4x_3 = 0,\, x_1 - x_2 = 0\right\}.$$

---

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz simétrica tal que $Y_1(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, Y_2(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ son soluciones del sistema $Y' = AY$ y tal que $\det(A) = 8$. Hallar todos los $Y_0 \in \mathbb{R}^3$ tales que la solución del problema de valores iniciales $Y' = AY$, $Y(0) = Y_0$ tiene norma acotada cuando $t \to +\infty$.

---

3. Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ la matriz que satisface las siguientes propiedades:

$$\text{col}(A) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T\right\},\ \text{nul}(A) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\},\ a_{11} > 0,\ \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sqrt{48},$$

y sea $b = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$. Determinar la solución por cuadrados mínimos de norma mínima de la ecuación $Ax = b$.

---

4. En $\mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico se considera, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, la matriz con respecto a la base canónica de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^2$ sobre el subespacio $\mathbb{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + x_2 = 0\right\}$. Hallar el máximo y el mínimo del conjunto

$$\left\{\|Ax\|^2 : x^T \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} x = 1\right\}$$

y los vectores que los realizan.